

# 塑性ひずみ増分に応力増分方向依存性を考慮した 塑性構成式について

A Study on Plastic Constitutive Law Incorporating Directional Dependence of  
Plastic Strain Increment on Stress Increment



琉球大学工学部  
機械システム工学科 准教授  
博士(情報科学) 末吉 敏恭  
Toshiyasu Sueyoshi



(株) 沖縄エネテック  
上江洲 友麻  
Yuma Uezu

## 1. はじめに

自動車パネルなどの薄板材料のプレス加工においては、しわや破断といった成形不良低減のため、シミュレーション技術による予測が行われている。破断現象の良く知られた例であるが、Fig. 1 に示す単軸引張変形を考えると、一様変形 (Fig. 1(a)) の後、板幅方向にくびれ出す拡散くびれ (Fig. 1(b))、局所的に変形が集中する局所くびれ (Fig. 1(c)) が生じた後、ほどなくして分離・破断 (Fig. 1(d)) が生じる。これら成形限界に対する予測シミュレーション技術の高度化のためには、加工対象となる材料の変形挙動を精度良く表現できる材料モデル、すなわち塑性構成式が必要である。

構成式とは、材料に生じる応力とひずみを関係づける式であり、弾性構成式として Hooke 則が良く

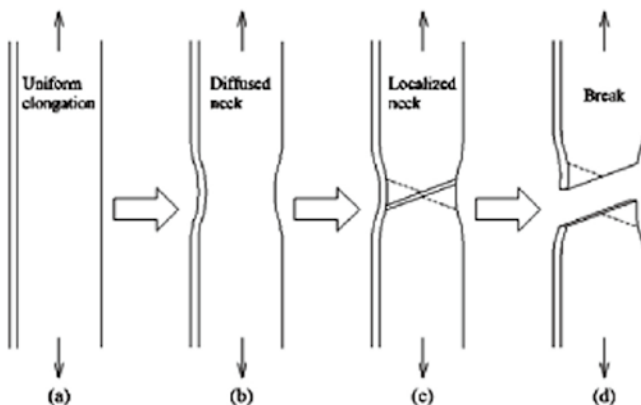


Fig. 1 Illustration as deformation of thin sheet metal with uni-axial tension.

知られているが、材料の降伏現象以降の塑性変形を含む構成式としては、ひずみ増分理論に基づく Prandtl-Reuss 則 (以下、 $J_2F$  則) と、全ひずみ理論に基づく Henchy 変形論の増分形 (以下、 $J_2D$  則) が知られている<sup>(1)</sup>。一般的な弾塑性解析には、負荷・除荷の基準が明確であるとして  $J_2F$  則が用いられているが、成形限界予測に多用されている Stören-Rice 理論<sup>(2)</sup> (以下、S-R 理論) には  $J_2D$  則が用いられ、 $J_2F$  則より実験に近い結果を与えることが報告されている<sup>(3), (4)</sup>。この要因について、 $J_2F$  則と  $J_2D$  則をそれぞれ剛塑性形式で式(1)と式(2)に示し、比較してみる。

$$J_2F \text{ 則} : d\epsilon^p = d\lambda \sigma' \quad (1)$$

$$J_2D \text{ 則} : d\epsilon^p = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{H'} - \frac{1}{E_s} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sigma' + \frac{1}{E_s} d\sigma' \right] \quad (2)$$

ここで、 $d\epsilon^p$  は塑性ひずみ増分テンソル、 $\sigma'$  と  $d\sigma'$  は現偏差応力テンソルとその増分テンソルであり、その他はスカラー量で、 $\bar{\sigma}$  と  $d\bar{\sigma}$  は相当応力とその増分を、 $d\lambda$  は比例係数、 $E_s$  と  $H'$  は、相当応力-相当塑性ひずみ曲線の、それぞれセカント係数と接線係数を表す。塑性ひずみ増分方向のみを考えた場合、式(1)の  $J_2F$  則は現偏差応力と塑性ひずみ増分の関係式であり、塑性ひずみ増分方向は現偏差応力方向に一義的に決定され、後続の応力増分方向には全く依存しない。対して、複雑ではあるが、式(2)の  $J_2D$  則は、第二項に示されるように後続の応力増分との関

係をも含んでおり、増分方向が急変した場合にも追従できることがわかる。すなわち、Fig. 1(c)に示すように、一様変形方向から局所せん断帯方向へ、変形が急変するような破断現象の予測には、後続の応力増分方向を考慮することが有効であると考えられる。そこで、塑性ひずみ増分に応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式がいくつか提案された<sup>(5)~(7)</sup>。本稿では、その一つである呉屋-伊藤則<sup>(8),(9)</sup>の概要について述べ、さらに著者らが構成式の妥当性を検討するために製作している、ハイドロフォーム成形試験機による実証試験装置について紹介する。

## 2. 呉屋-伊藤による応力増分方向依存塑性構成式

圧延加工によって製造される薄板材料は、圧延方向とその直角方向で、一般的に降伏応力などの機械的性質が異なる異方性を示す<sup>(10)</sup>。呉屋らによって提案された応力増分方向依存塑性構成式<sup>(8)</sup>は等方性材料によるものであったが、その後、異方性材料に対して拡張がなされた<sup>(9)</sup>。Ilyushin の偏差応力空間における概念図を Fig. 2 に示す。

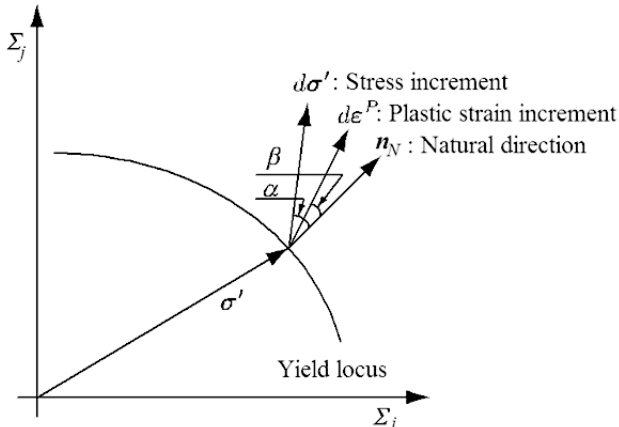


Fig.2 Geometrical relationship among yield locus in Ilyushin's stress space, stress increment, plastic strain increment and measured angle at natural direction vector.

任意の負荷点に対し、偏差応力増分 $d\sigma'$ から一意に定まる塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ において、それらの方向が一致する方向を順方向 $n_N$  (大きさ $|n_N| = 1$ ) として定義する。順方向 $n_N$ と偏差応力増分 $d\sigma'$ による寄与の「重み付き平均」として、異方性材料に対して拡張された呉屋らによる応力増分方向依存塑性構成式は次式のように構築される (「:」はスカラー

一積)。

$$H'_N d\epsilon^P = \mu(\alpha) [K_F(d\sigma':n_N) n_N + K_D d\sigma'] \quad (3)$$

ここで、 $\alpha$ は偏差応力増分の順方向 $n_N$ からの振れ角であり、 $\beta(\alpha)$ は順方向 $n_N$ からの塑性ひずみ増分方向を、 $\mu(\alpha)$ は塑性ひずみ増分の大きさを表す無次元パラメータで、それぞれ $\alpha$ の関数である。 $\alpha$ および $\beta(\alpha)$ は、Fig. 2 からわかるように順方向 $n_N$ からの振れ角として次式により定義される。

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \cos^{-1} \frac{d\sigma':n_N}{|d\sigma'|}, \quad \beta(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \cos^{-1} \frac{d\epsilon^P:n_N}{|d\epsilon^P|} \quad (4)$$

順方向 $n_N$ における加工硬化係数 $H'_N$ および $\mu(\alpha)$ に、以下の関係を定義する。

$$\mu(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} H'_N \frac{|d\sigma'|}{|d\epsilon^P|} \quad (5)$$

式(4)および(5)を式(3)に導入することにより、重み係数 $K_F$ および $K_D$ は次式で表すことができる。

$$K_F = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad K_D = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (6)$$

提案されている式(3)をシミュレーションで用いるためには、順方向 $n_N$ を具体的に決定する必要がある。本来、順方向 $n_N$ を決定するためには、任意の応力状態に対して様々な方向に応力増分を与え、塑性ひずみ増分方向と一致する方向を測定する実験を多数行わなくてはならず、現実的ではない。そこで、著者らは、任意の応力状態に対して順方向 $n_N$ を規定する関数形を、順方向ポテンシャル関数 $g(\sigma)$ と新たに定義し、任意のスカラー量を用いて次式で定義した<sup>(11)</sup>。

$$n_N \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (7)$$

順方向ポテンシャル関数 $g(\sigma)$ の具体的な関数形として、最も簡単に異方性を表現できる Hill の応力の二次形式を用い、平面応力状態を仮定すると次式で表現される。

$$g(\sigma) = F_N \sigma_{22}^2 + G_N \sigma_{11}^2 + H_N (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + N_N \sigma_{12}^2 \quad (8)$$

式(8)は Hill の二次異方性降伏関数と同形式であるが、それと区別するために、あえて応力の二次形式と呼ぶことにする。 $F_N \sim N_N$ は、Hill の二次異方性降伏関数と同様に、Lankford の  $r$  値 (=板幅ひずみ/板厚ひずみ) から決定される係数である。現応力

テンソルと塑性ひずみ増分テンソルを結びつける関係として、降伏関数を塑性ポテンシャルとし、降伏関数（曲線）に対してその法線方向が塑性ひずみ増分方向を示す考え方を関連流れ則<sup>(1)</sup>というが、順方向 $\mathbf{n}_N$ と順方向ポテンシャル関数 $g(\boldsymbol{\sigma})$ との関係は、関連流れ則と同様の考え方である。すなわち、順方向ポテンシャル関数 $g(\boldsymbol{\sigma})$ の法線方向として、順方向 $\mathbf{n}_N$ が規定されることになる。ちなみに式(1)は、Mises の降伏関数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ を塑性ポテンシャルとする関連流れ則 $d\boldsymbol{\epsilon}^P = d\lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ であることが知られている<sup>(1)</sup>。

一方、吉田ら<sup>(9)</sup>は、筆者らと別の考え方から順方向 $\mathbf{n}_N$ を定義している。式(3)～(6)を幾何学的関係などから整理することによって、任意のスカラー量 $\lambda$ 、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を表す新たなパラメータ $K_C$ を導入し、次式で表現している。

$$\mathbf{n}_N \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \left[ \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - K_C \frac{d\boldsymbol{\sigma}'}{|\boldsymbol{\sigma}'|} \right] \quad (9)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + N\sigma_{12}^2 \quad (10)$$

ここで、式(9)の第一項目は、式(10)に示す Hill の二次異方性降伏関数をポテンシャルとする従来の関連流れ則と同様の関係を導入しているが、パラメータ $K_C$ についても検討を要する関係となっている。これら応力増分方向依存塑性構成式におけるパラメータ、順方向および順方向ポテンシャルに関して検討を行うために、実験に代わる方法として、アルミニウム材を想定し、結晶塑性理論に基づく有限要素多結晶モデル<sup>(12)</sup>による解析結果を利用した数値実験を行った。詳細については文献(11)を参照いただきたいが、材料のもつ異方性の影響により順方向が初期負荷方向から移動することが示され、塑性ひずみ増分方向 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})$ と、塑性ひずみ増分の大きさを表す $\mu(\boldsymbol{\alpha})$ の関数形が検討されている。加えて、順方向ポテンシャル関数 $g(\boldsymbol{\sigma})$ が、順方向 $\mathbf{n}_N$ を規定する関数としての役割を担っていることが検討されている。また、関連流れ則に対しては、異方性降伏関数の係数を降伏応力のみで決定した場合には、塑性ポテンシャルとしての役割を果たすことはできず、あくまで負荷・除荷の判断基準となるもので降伏判定のみに用いることとし、塑性ひずみ増分方向は、

順方向ポテンシャルのような新たなポテンシャル関数を用いることが有用であることが検討されている。式(3)で示される呉屋-伊藤による応力増分方向依存塑性構成式は、順方向と降伏関数を切り離して評価できることから、成形限界予測などに対して精度向上が期待できると考えられる。

### 3. 塑性構成式の実験評価システムの構築<sup>(13)</sup>

実験によって構成式の精度評価や妥当性の検討を行うためには、試験片に対して、任意の変形経路や負荷経路を与えられるような装置が必要である。そこで著者らは、円管材に内圧負荷と軸力を与えることにより、円周方向と軸方向の二方向変形が可能な hidrofoam 成形（以下、HF 成形）を用いた構成式の実験評価システムを、制御系および計測系の製作によって構築している。HF 成形とは、金型内側にセットした管材に高压の液体を流入させつつ、軸方向の変位を与えることで、管材を金型内側形状に倣わせて拡張・成形する加工方法<sup>(14)</sup>で、近年、自動車等のフレーム製作などに用いられている。本稿では、現在製作中である、画像処理を用いた HF 成形実験時の計測法について検討したので紹介する。

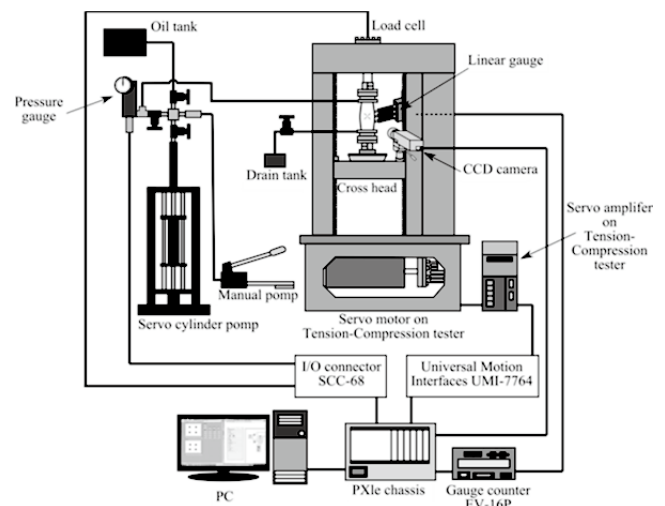


Fig.3 Illustration as experimental apparatus

HF 成形実験装置の概要を Fig. 3 に示す。実験装置は引張圧縮試験機をベースとしており、サーボシリンダポンプにて機械油を送ることで内圧負荷を与え、試験機本体に取り付けたサーボモータによって軸変位を与える構造となっている。試験片には、初

期外径  $d_0=32[\text{mm}]$ 、長さ  $l_0=210[\text{mm}]$ 、肉厚  $t_0=2[\text{mm}]$ の純アルミニウム引抜円管 (A1070) を使用し、その表面には Fig. 4 に示すマーキングを施してある。内側と外側の各 4 点で有限要素法における四節点アイソパラメトリック要素とみなすことで、軸方向ひずみおよび円周方向ひずみを算出する。制御・計測は、Fig. 5 に示す NATIONAL INSTRUMENTS 社 (以下、NI 社) の LabVIEW およびそのハードウェア群によって構成される。ひずみは、CCD カメラから得られる画像を NI 社の Vision Assistant を用いて処理した結果から算出し、応力は、圧力変換器、荷重変換器およびリニアゲージから得られる計測値を用いて算出している。

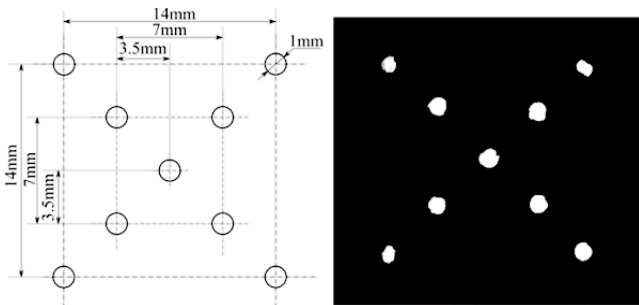


Fig.4 Making pattern on a specimen

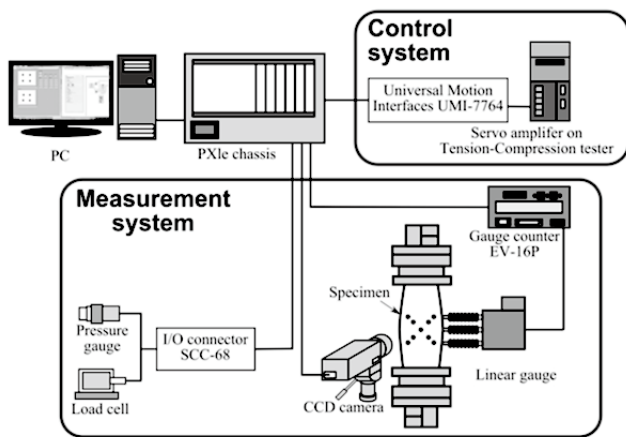


Fig.5 Measurement and Control Systems for experimental apparatus

#### 4. 実験評価システムの画像処理による計測結果と精度

実験中、Fig. 4 に示す、曲率を持つ試験片表面に施された点の変位を画像処理によって計測しているが、内圧負荷に伴う拡張のため、固定している CCD カメラと試験片表面との距離が近くなり、焦点距離が変化する。そこで、撮られた二次元画像か

ら三次元的に変化する計測点を捕捉し、実座標へ補正する方法を組み込んだひずみ算出プログラムを作成し、その検討を行った。ちなみに一般的な CCD カメラの 1 画素は長方形であるため、縦横の補正精度に差が出るが、用いた NI 社の CCD カメラは 1 画素が正方形であるため、そのような差は無いという特徴を有している。算出された円周方向ひずみ  $\epsilon_\theta$  から求めた試験片直径と、実際の計測値との比較を Fig. 6 に示す。縦軸に試験片直径  $d [\text{mm}]$  を、横軸には実験に要した時間を 1 とした割合を表している。実計測は、算出された  $\epsilon_\theta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.19$  の時に、それぞれ内圧を一旦除荷して行った。円周方向ひずみ  $\epsilon_\theta$  から算出した試験片直径は、各実測値とほぼ一致していることから、作成したひずみ算出プログラムは、拡張による焦点距離変化の補正がうまく行われているといえる。

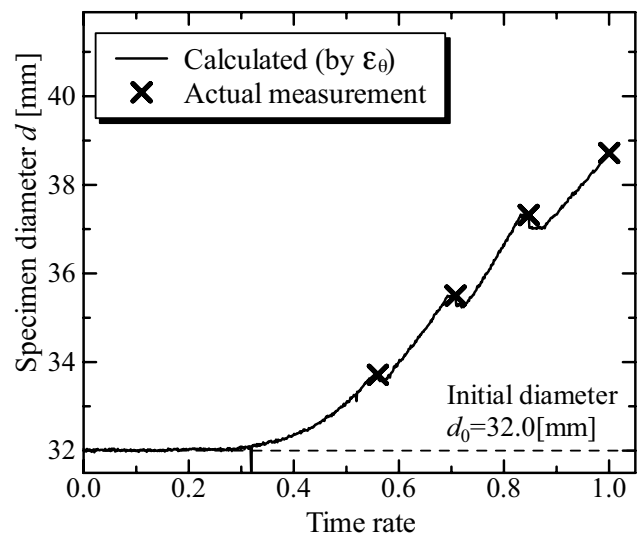


Fig.6 Comparison of specimen diameter  $d$  calculated by circumferential strain  $\epsilon_\theta$  and actual measurement

次に、応力算出に必要な曲率半径の計測を、接触式のリニアゲージから CCD カメラによる画像処理による算出法に変更したので、その精度について検討を行った。リニアゲージによる計測では、試験片周囲での装置の取り回しが悪く、また破断した際に圧力媒体がリニアゲージにかかることが考えられる。さらに軸変位を与えた際、試験片チャック部に接触することが想定されるため、画像処理計測に変更することを考えた。画像計測点は、リニアゲージと同じ 3 点の位置と、その間に 2 点を追加した計 5



点であり、画像処理を用いて計測したこれらの点の変位量について、最小二乗法を用いて算出した。それぞれ算出された曲率半径の比較を Fig. 7 に示す。

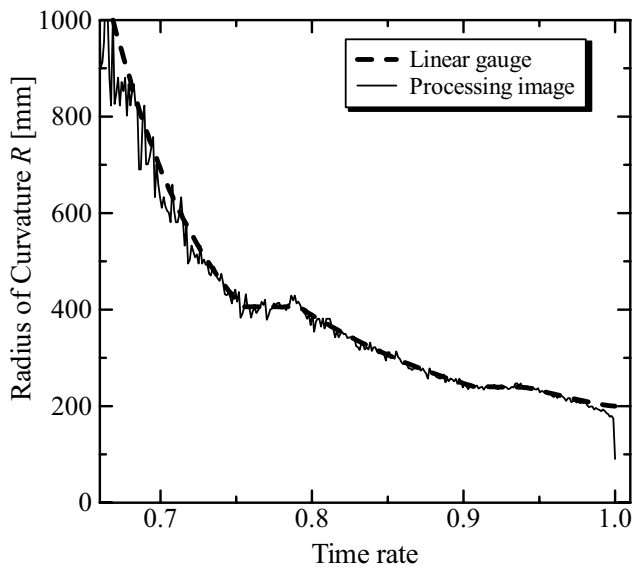


Fig.7 Comparison of radius of curvature  $R$  calculated by linear gauge and processing image

実験開始から半ばまでは、計測値が比較的安定していなかったため、実験後半について検討を行っている。画像処理から算出された曲率半径に細かい上下変動が見られるが、これは実験開始時に決定した二値化処理に用いる画像しきい値が、室外からの光量変化によって適正值でなくなることが原因として考えられる。しかし、画像処理から最小二乗法によって得られた曲率半径は、リニアゲージと同様の傾向を示していることがわかる。今後、光量や、CCD

カメラの位置、計測点数を増やす等の検討課題を残す結果となった。

本装置の目標は、計測結果により得られた軸方向ひずみおよび円周方向ひずみを、塑性構成式の適用された成形限界線図<sup>(15)</sup> (Forming Limit Diagram: 以下、FLD) と比較し、構成式の妥当性の評価および検討に用いることである。しかし、システム製作中のため、FLD は、一般的な破断限界予測に多用されている S-R 理論を用いて検討を行った。さらに、製作中のシステムでは軸力関係の制御が未完成のため、内圧負荷のみの実験結果である。マーキングの内側の 4 点を用いて算出したひずみ値を Inner とし、外側を用いて算出したものを Outer として、それらのひずみ履歴を Fig. 8 に示す。縦軸に軸方向ひずみ $\epsilon_x$ 、横軸に円周方向ひずみ $\epsilon_\theta$ としている。内圧負荷しか与えていないため、ひずみ履歴は円周方向ひずみ $\epsilon_\theta$ 軸上に遷移していることがわかる。枠内の拡大図を見ると、円周方向ひずみ $\epsilon_\theta=0.15$  付近から軸方向ひずみ $\epsilon_x$ が大きくなっているが、これは内圧負荷による拡張の際、変形は円周方向のみだけでなく、曲率を持つことで軸方向に引張変形が生じるためである。軸変位を制御できるようにシステム構築ができれば、平面ひずみ状態での変形を維持することが可能となり、ひずみ履歴は円周方向ひずみ $\epsilon_\theta$ 軸上へ分布することが可能となる。S-R 理論との差に関しては、理論値の計算に加工硬化指数  $n=0.26$  としたが、これはアルミニウム材に

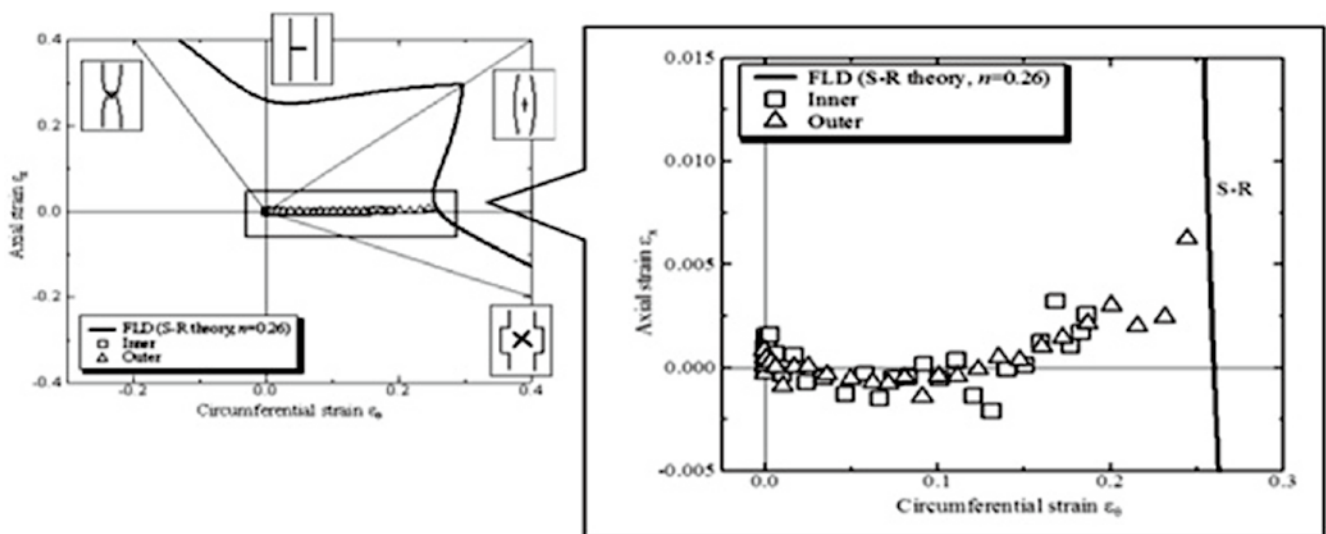


Fig.8 Strain path diagram with FLD calculated by S-R theory

おける一般的な値を用いており、今後、実験で使用している試験片を用いた引張試験等を行うことで  $n$  値を決定していく必要がある。また、S-R 理論は等方性材料を前提としているため、今回用いている試験片の異方性の影響がないとは言えない。さらに、Fig. 9 に示す内圧  $p$  [MPa] と円周方向ひずみ  $\epsilon_\theta$  との線図では、円周方向ひずみ  $\epsilon_\theta=0.04$  付近から破断までの間に、内圧変化が  $7.0\sim 7.7$  [MPa] と狭く、一気に変形が進んでいることがわかる。今回は内圧負荷を与える機械油の送り量が一定速度であったため、変形と共に送り量を制御できるようなシステムの構築が必要であると考えられる。

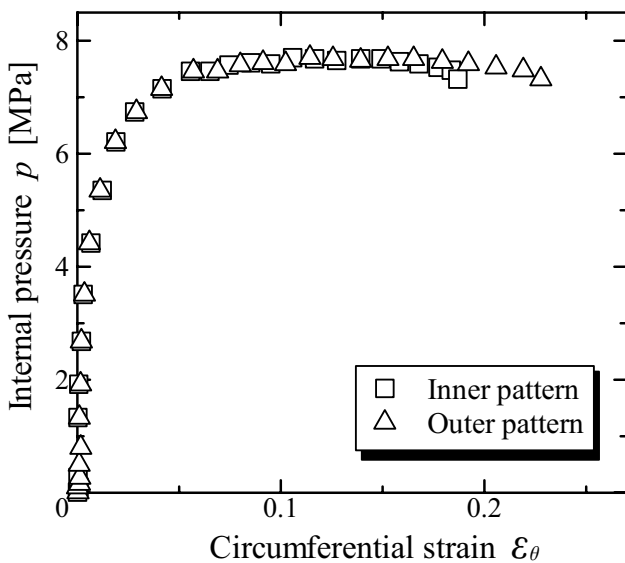


Fig.9 Internal pressure  $p$  - circumferential strain  $\epsilon_\theta$  Curves

## 5. おわりに

本稿では、異方性材料に適用された呉屋-伊藤によって提案された応力増分方向依存塑性構成式について紹介した。呉屋-伊藤則は、古典的構成式にみられる、降伏関数と塑性ひずみ増分方向を決定する塑性ポテンシャル関数が同一である関連流れ則とは異なり、除荷・負荷判定を行うべき降伏関数と塑性ひずみ増分方向を決定する関数とを分離して評価できることから、経路急変を伴うような成形限界予測などに対して精度向上が期待できる。また、研究室にて製作中の構成式の実験評価システムについては、軸力と内圧負荷の制御系の構築が急がれるものの、拡張に伴う焦点距離補正機能が活かされ、画像処理による計測とひずみ算出が可能であるこ

とを紹介した。今後も、研究室所属学生と共に、実験評価ならびに成形限界予測や弾塑性解析などのシミュレーションへの適用を目的に構成式に関する取り組みを進めるつもりである。

## 参考文献

- 1) 後藤學、塑性学、コロナ社、(1982).
- 2) Stören, S. and Rice, J.R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23, (1975), 421-441.
- 3) 伊藤耿一、塑性と加工、28-323、(1987)、1222-1229.
- 4) Stowell, E.Z., *NACA Tech. Note*, No.1556, (1948).
- 5) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W., *J. Mech. Phys. Solids*, 27, (1979), 465-487.
- 6) 後藤學、機論 A、47-424、(1981)、1389-1397.
- 7) 後藤學、機論 A、48-428、(1982)、493-501.
- 8) 呉屋守章、伊藤耿一、機論 A、54-504、(1988)、1617-1622.
- 9) 吉田亨、伊藤耿一、栗山幸久、臼田松男、塑性と加工、42-488、(2001)、919-923.
- 10) Hill, R., *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 193, (1948), 281-297.
- 11) 末吉敏恭、呉屋守章、伊藤耿一、宮城清宏、機論 A、67-663、(2001)、1754-1759.
- 12) Goya, M. and Ito, K., *JSME Int. J., Ser. A*, 40-2, (1997), 169-178.
- 13) 上江洲友麻、琉球大学大学院修士論文、(2011).
- 14) 淵澤定克、塑性と加工、45-527、(2004)、974-978.
- 15) 橋本浩二、塑性と加工、41-473、(2000)、527-534.