

## 技術論文

## 圧延ラインにおけるロールの温度および応力の理論解析

Theoretical Analyses of Temperatures and Stresses on Rolls in Strip Mill Lines



CPC技術開発室

李 平

Ping Li

CPC技術開発室

坂本 眞一

Shin-ichi Sakamoto

調整管理室

新田 信昭

Nobuaki Nitta

富山大学工学部 教授

五嶋 孝仁

Takahito Goshima

## 要 旨

圧延ラインにおける複合ロールに関し、ラプラス変換および有限フーリエ余弦変換によって、熱的負荷（接触伝熱、摩擦熱）および機械的負荷を受けているロールの温度、応力の理論解析を行った。得られた温度解および応力解を用いて、圧延ラインに加熱—冷却の繰り返しを受けている焼きばめ構造のロールを例にとり、稼働中のロールに生ずる温度および応力を数値計算し、ロール温度、応力の分布およびその推移を数値的に明らかにした。

## Synopsis:

Theoretical analyses of temperatures and stresses on composite rolls subjected to thermal loads (contact heat transfer and frictional heat) and mechanical loads in strip mill lines were carried out by means of the Laplace transformation and the finite Fourier cosine transformation. Using solutions of temperatures and stresses obtained from the theoretical analyses, and taking a shrinkage fit roll subjected to the repetition of heating and cooling in a strip mill line as an example, numerical calculations of temperatures and stresses generated in the roll under the work were carried out, furthermore, the distributions and transitions of temperatures and stresses were made clear numerically.

## 1 緒言

圧延ラインにおいて用いられるロールは熱的負荷および機械的負荷を受ける。ロールは加熱-冷却の繰り返しを受けるために、ロール表面近傍の温度、応力は変化し、ヒートクラックや表層剥離などによる肌荒れが発生しやすく、また、異常な熱応力による破損例もあることから、圧延ラインにおけるロールの温度および応力解析は古くから重要な課題となっている。特に実用のロールでは、二層複合材料のロールが多く、ロールを均一円柱として取り扱えない場合が多い。このため、小泉ら<sup>1)</sup>は圧延用チルドロールに関して表面温度が与えられた同心二層円柱の熱応力を解析し、また野田ら<sup>2)</sup>は帯状熱源による複合円柱の熱応力を解析した。しかし、実際の圧延ラインではロールは回転しており、ロール表面は回転移動加熱されていると考えねばならない。著者らの一人は、ロールのこのような状況に

対応できるモデルを用いて、回転移動加熱による複合円柱の非定常熱応力を解析し<sup>3)</sup>、さらにこの回転移動熱源による熱応力拡大係数を解析した<sup>4)</sup>。本研究では、この解析方法を用いて、圧延ラインに用いられる同心二層複合ロールに関し、ステップ状に変化する移動熱源は一定角速度で回転するとして、ラプラス変換および有限フーリエ余弦変換によって、熱的負荷（接触伝熱、摩擦熱）および機械的負荷を受けている稼働中のロールの温度、応力の理論解析を試みた。なお解析にあたっては材料の熱的物性値および弾性係数は温度によらず一定であると仮定した。

## 2 解析モデルと円柱座標系

## 2.1 解析モデル

Fig.1に示すように、熱的負荷（接触伝熱、摩擦熱）および機械的負荷を受けている解析モデルを考える。ロール表面

はコイルと接触するところで、コイルからの伝熱、コイルとロールとの摩擦による発熱のために加熱され、その後、コイルから離れると水冷または空冷される。このような加熱—冷却の繰り返しを一つのコイルが通過するまで繰り返す。ロールの入熱はステップ状に変化するパターンを考える。

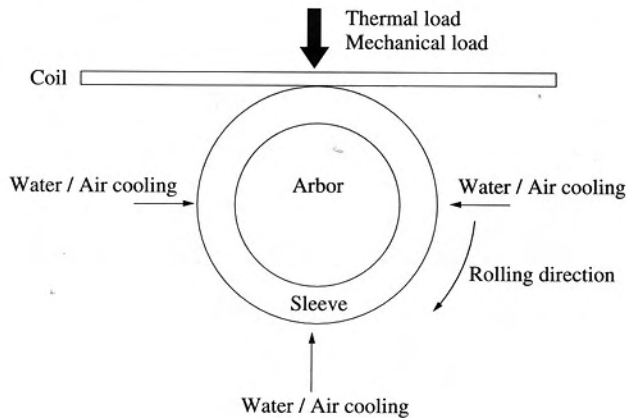


Fig.1 Analysis model

## 2.2 円柱座標系

Fig.1の問題を解析するために、円柱座標系  $(r, \theta, z)$  および熱源とともに回転している円柱座標系  $(r', \psi, z)$  をFig.2に示すように設定し、さらに以下の解析においては次式に示す無次元変数や無次元量を採用する。

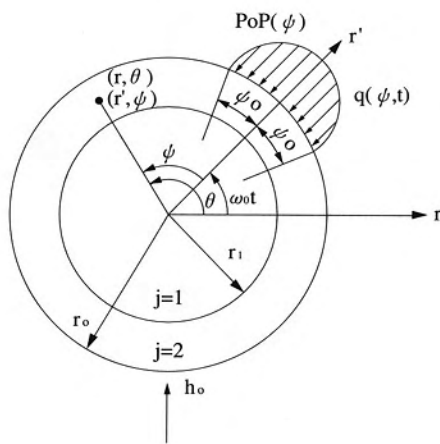


Fig.2 Cylinder coordinate system

$\rho = r/r_0$	$\rho_1 = r_1/r_0$	$a = a_0/r_0$	$\zeta = z/r_0$
$\tau = \kappa_1 t / r_0^2$	$\omega = \omega_0 r_0 / \kappa_1$	$h_0 = H_0 r_0 / K_2$	$h_s = H_s r_0 / K_2$
$\kappa^2 = \kappa_1 / \kappa_2$	$K = K_1 / K_2$	$\Delta = \delta / r_0$	$G = G_1 / G_2$

ここで  $r_0$  はロールの外径、 $t$  は時間、 $\kappa_j$  は温度伝導率、 $K_j$  は熱伝導率、 $\omega$  は回転角速度、 $\delta$  は焼ばめ代（直盛タイプロールの場合  $\delta = 0$ ）、 $H_s$ 、 $H_0$  はそれぞれロール表面加熱、冷却時の熱伝達率を示し、添字  $j=1$  をもって内層 ( $0 \leq \rho \leq \rho_1$ )、 $j=2$  をもって外層 ( $\rho_1 \leq \rho \leq 1$ ) を示すものとする。

なお流入する熱流  $q(\psi, t)$  は以下のように設定する。

$$q(\psi, t) = Q_0 Q(\psi) H(t) + V S_f P_0 P(\psi) H(t) \quad \dots\dots (1)$$

$$Q(\psi) = 1 \quad (\text{一様分布})$$

$$P(\psi) = 3\pi(\psi_0^2 - \psi^2) / (8\psi_0^2) \quad (\text{放物線分布})$$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

$V$ : ロール周速度  $S_r$ : すべり率  $f$ : 摩擦係数  
 $P_0$ : ヘルツ接触の最大圧力  $Q_0$ : 接触による熱流束

## 3 温度解析

### 3.1 熱伝導方程式と初期条件および境界条件

#### 3.1.1 熱伝導方程式

ある任意の時刻  $\lambda$  ( $\lambda \leq \tau$ ) で瞬間熱流束が流入する場合を想定し、この時の温度  $T_j^\lambda$  に関する熱伝導方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 T_1^\lambda}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_1^\lambda}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_1^\lambda}{\partial \psi^2} = \frac{\partial T_1^\lambda}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 T_2^\lambda}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_2^\lambda}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T_2^\lambda}{\partial \psi^2} = \kappa^2 \frac{\partial T_2^\lambda}{\partial \tau} \quad \dots\dots (2)$$

#### 3.1.2 初期条件

ロールの初期温度は一様な温度であり、この温度を基準として、初期条件は次のようになる。

$$(T_j^\lambda)_{\tau=0} = 0 \quad (j=1, 2) \quad \dots\dots (3)$$

#### 3.1.3 境界条件

ロール表面 ( $\rho=1$ ) および接合面 ( $\rho=\rho_1$ ) での境界条件は次式のように与えられる。

$$\left( \frac{\partial T_2^\lambda}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} + h_0 (T_2^\lambda)_{\rho=1} = \frac{r_0}{K_2} q(\psi, t) \delta(\tau - \lambda) \quad \dots\dots (4)$$

$\delta(\tau - \lambda)$ : デイラックのデルタ関数

$$K \left( \frac{\partial T_1^\lambda}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_1} = \left( \frac{\partial T_2^\lambda}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_1} \quad \dots\dots (5)$$

$$(T_2^\lambda)_{\rho=\rho_1} - (T_1^\lambda)_{\rho=\rho_1} = R_H \frac{K_1}{r_0} \left( \frac{\partial T_1^\lambda}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_1} \quad \dots\dots (6)$$

$R_H$ : 接触熱抵抗

### 3.2 温度解析

式 (3) を考慮して、式 (2) および式 (4) ~ (6) を次のようにラプラス変換し、

$$\bar{T}(P) = \int_0^{\infty} T(\tau) e^{-P\tau} d\tau$$

さらに  $\psi$  に関する対称性を考慮して有限フーリエ余弦変換を施せば、

$$\hat{T}(n) = \int_0^{\pi} T(\psi) \cos(n\psi) d\psi$$

変形されたベッセルの微分方程式の境界値問題となるので、与えられた領域内での有限性を考慮して容易に解を得ることができる。得られた解を有限フーリエ余弦逆変換およびラプラス逆変換すれば、瞬間加熱による温度場  $T_j^\lambda$  が次式のように得られる。

$$T_j^\lambda = \frac{r_0 Q_0}{K_2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta_{12}^{n_2} \hat{Q}(n) \cos(n\psi) \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k S_n^{(j)}(\rho, x_k)}{f_n'(x_k)} e^{-x_k^2(\tau-\lambda)} \right\} \dots\dots (7)$$

さらに  $T_j^\lambda$  を時間  $\lambda$  について積分すれば、回転移動熱源による温度場  $T_j$  が次式のように得られる。

$$T_j = \frac{r_0 Q_0}{K_2} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta_{12}^{n_2} \hat{Q}(n) \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{x_k S_n^{(j)}(\rho, x_k)}{(x_k^4 + n^2 \omega^2) f_n'(x_k)} \times \{ S_n^c(\tau) \cos(n\theta) + S_n^s(\tau) \sin(n\theta) \} \right\} \right\} \dots\dots (8)$$

温度解の詳細説明を付記1に示す。

#### 4 応力解析

##### 4.1 熱弾性基礎式と初期応力および力学的境界条件

###### 4.1.1 熱弾性基礎式

瞬間熱流束が流入した場合の平面ひずみ非軸対称状態にある物体の熱弾性基礎式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_j^\lambda + \frac{1}{1-2\nu_j} \frac{\partial e_j^\lambda}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} (u_j^\lambda + 2 \frac{\partial v_j^\lambda}{\partial \psi}) \\ = \frac{2(1+2\nu_j)}{1-2\nu_j} \alpha_j \frac{\partial T_j^\lambda}{\partial \rho} \\ \nabla^2 v_j^\lambda + \frac{1}{1-2\nu_j} \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_j^\lambda}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho^2} (2 \frac{\partial u_j^\lambda}{\partial \psi} - v_j^\lambda) \\ = \frac{2(1+2\nu_j)}{1-2\nu_j} \frac{\alpha_j}{\rho} \frac{\partial T_j^\lambda}{\partial \psi} \dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで  $u_j^\lambda, v_j^\lambda$  はそれぞれ半径 ( $r$ ) および円周 ( $\theta$ ) 方向変位を表し、 $\nu_j, \alpha_j$  は材料のポアソン比および線膨張係数であり、また  $e_j^\lambda$  は次式で示される。

$$e_j^\lambda = \frac{\partial u_j^\lambda}{\partial \rho} + \frac{u_j^\lambda}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_j^\lambda}{\partial \psi}$$

###### 4.1.2 初期応力

初期焼ばめ圧力  $P_m$  による初期応力は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{r_0}^{(1)} = \sigma_{\theta_0}^{(1)} = -P_m \quad u_{r_0}^{(1)} = -(1-\nu_2) P_m r_0 \rho / E_1 \\ \sigma_{r_0}^{(2)} = \frac{P_m \rho^2}{1-\rho^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \\ u_{r_0}^{(2)} = \frac{r_0 P_m \rho^2}{E_2 (1-\rho^2)} \left\{ (1-\nu_2) \rho + \frac{1+\nu_2}{\rho} \right\} \\ \sigma_{\theta_0}^{(2)} = \frac{P_m \rho^2}{1-\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで  $P_m = \frac{\Delta}{\rho_1 \{ (1-\nu_1) / E_1 + [(1+\rho^2) / (1-\rho^2) + \nu_2] / E_2 \}}$

ロールは直盛タイプ構造の場合

$$P_m = 0 \quad \sigma_{r_0}^{(j)} = \sigma_{\theta_0}^{(j)} = u_{r_0}^{(j)} = 0 \quad (j=1, 2)$$

###### 4.1.3 力学的境界条件

ロール表面 ( $\rho=1$ ) および接合面 ( $\rho=\rho_1$ ) での力学的境界条件は次式のように表される。

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr}^{(2)})_{\rho=1} = \begin{cases} -P_0 P(\psi) & |\psi| \leq \psi_0 \\ 0 & |\psi| > \psi_0 \end{cases} \\ (\sigma_{rr}^{(1)})_{\rho=\rho_1} = (\sigma_{rr}^{(2)})_{\rho=\rho_1} \\ (u_r^{(2)})_{\rho=\rho_1} - (u_r^{(1)})_{\rho=\rho_1} = \delta \\ \text{(直盛タイプ構造のロールでは } \delta=0) \\ (v_\theta^{(1)})_{\rho=\rho_1} = (v_\theta^{(2)})_{\rho=\rho_1} \dots\dots (11) \end{aligned}$$

#### 4.2 応力解析

次式のように定義される熱弾性ポテンシャル  $\Omega^{(j)}$  および応力関数  $\psi_0^{(j)}, \psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}$  を導入する<sup>5)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{u_r^{(j)}}{r_0} = \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi_0^{(j)}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \psi_1^{(j)}}{\partial \rho} \cos \theta + \rho \frac{\partial \psi_2^{(j)}}{\partial \rho} \\ \times \sin \theta - (3-4\nu_j) (\psi_1^{(j)} \cos \theta + \psi_2^{(j)} \sin \theta) \\ \frac{v_\theta^{(j)}}{r_0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_0^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_1^{(j)}}{\theta} \cos \theta + \frac{\partial \psi_2^{(j)}}{\partial \theta} \\ \times \sin \theta + (3-4\nu_j) (\psi_1^{(j)} \sin \theta - \psi_2^{(j)} \cos \theta) \dots\dots (12) \end{aligned}$$

式 (12) を式 (9) に代入すれば  $\Omega^{(i)}$  および  $\psi_0^{(i)}$ 、 $\psi_1^{(i)}$ 、 $\psi_2^{(i)}$  が次式の解であるとき、式 (9) は満足される。

$$\nabla^2 \Omega^{(i)} = \frac{(1+\nu_j)}{1-\nu_j} \alpha_j T_j^{\lambda} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\nabla^2 \psi_0^{(i)} = \nabla^2 \psi_1^{(i)} = \nabla^2 \psi_2^{(i)} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13)、(14) をラプラス変換し、これを満足する熱弾性ポテンシャルおよび応力関数が得られる。得られた熱弾性ポテンシャルおよび応力関数を式 (12) のラプラス変換式に代入し、さらにデュアメル・ノイマン則に代入すれば、応力の一般解が求まる。式 (10) の初期応力および式 (11) の境界条件を考慮して、一般解中の未定定数が決定される。得られた応力成分をラプラス逆変換すれば瞬間加熱時の解が求まり、さらにこれらの解を  $\lambda$  に関する積分を行えば、熱応力解が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} = & \frac{2E_j P_0}{\pi(1-\nu_j)G_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta_{12}^{(n)} \hat{P}_n \right. \\ & \times \left. \left\{ {}^C X_n^{(i)}(\rho) \cos(n\psi) + {}^S X_n^{(i)}(\rho) \sin(n\psi) \right\} \right\} \\ & + 2G_j \left\{ \frac{A^{(i)}}{1-2\nu_j} - \frac{B^{(i)}}{\rho^2} - \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j} \frac{\alpha_j}{\rho^2} \tau_j(\rho) \right\} \\ & + \sigma_{ro}^{(i)} + \frac{4E_j \alpha_j I_0 Q_0}{\pi K_2(1-\nu_j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \hat{Q}(n) \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{G_n^C(\tau, \theta)}{(\delta \kappa^{(i)})^2 X_k (X_k^4 + n^2 \omega^2) f_n'(X_k)} \right. \\ & \times \left. \left. \left\{ {}^T X_n^{(i)}(\rho) + \frac{n(1-n)}{\rho^2} S_n^{(i)}(\rho, X_k) - \frac{\delta \kappa^{(i)} X_k}{\rho} S_{n+1}^{(i)}(\rho, X_k) \right\} \right\} \right\} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = & \frac{2E_j P_0}{\pi(1-\nu_j)G_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta_{12}^{(n)} \hat{P}_n \right. \\ & \times \left. \left\{ {}^C Y_n^{(i)}(\rho) \cos(n\psi) + {}^S Y_n^{(i)}(\rho) \sin(n\psi) \right\} \right\} \\ & + 2G_j \left\{ \frac{A^{(i)}}{1-2\nu_j} + \frac{B^{(i)}}{\rho^2} + \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j} \frac{\alpha_j}{\rho^2} \tau_j(\rho) \right\} + \sigma_{\theta o}^{(i)} \\ & + \frac{4E_j \alpha_j I_0 Q_0}{\pi K_2(1-\nu_j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \hat{Q}(n) \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{G_n^S(\tau, \theta)}{(\delta \kappa^{(i)})^2 X_k (X_k^4 + n^2 \omega^2) f_n'(X_k)} \right. \\ & \times \left. \left. \left\{ {}^T Y_n^{(i)}(\rho) + \left[ \frac{n(n-1)}{\rho^2} - (\delta \kappa^{(i)})^2 X_k^2 \right] \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. S_n^{(i)}(\rho, X_k) + \frac{\delta \kappa^{(i)} X_k}{\rho} S_{n+1}^{(i)}(\rho, X_k) \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

応力解の詳細説明を付記2に示す。

## 5 数値計算例

ここでは、圧延ラインに用いられる焼きばめ構造のロールを例にとり、ステップ状加熱、冷却がある場合を考え、FORTRAN77言語を用いて、数値計算を行った。数値計算用のパラメーターを Table 1 に示す。

Table 1 Parameters used for the numerical calculations

Roll size	1. Roll diameter 313 mm 2. Shrink diameter 235 mm 3. Shrinking allowance 0.125 mm
Physical constant	1. Thermal conductivity (kcal / mm.s.°C) Arbor material $1.18 \times 10^{-5}$ Sleeve material $0.68 \times 10^{-5}$ Air $5.861 \times 10^{-9}$ 2. Heat transfer coefficient (kcal / mm <sup>2</sup> .s.°C) Heating (Coil → Roll) $2.8 \times 10^{-5}$ Water cooling (Roll → Water) $3.6 \times 10^{-5}$ Air cooling (Roll → Air) $8.3 \times 10^{-9}$ 3. Linear expansion coefficient (/ °C) Arbor material $13.9 \times 10^{-6}$ Sleeve material $13.6 \times 10^{-6}$ 4. Specific heat (kcal / kg.°C) Arbor material 0.094 Sleeve material 0.086 5. Specific gravity 7.85 6. Coefficient of friction 0.2 7. Poisson ratio 0.29 8. Young modulus (kg / mm <sup>2</sup> ) 21950
Application condition	1. Coil temperature 600°C 2. Cooling method Water or air 3. Heating and cooling pattern  $t_1 = 2s, t_2 = 62s, t_3 = 72s, t_4 = 144s$ 4. Rolling velocity 5500mm / s 5. Lead ratio 5% 6. Load 100000kg

### 5.1 温度および応力の分布

Fig.3 (a) に冷却および水冷の場合の半径方向の温度分布を示す。ロールが空冷されている場合、ロールとコイルとの2秒間の接触で、ロール表面は600°C近くの高温に上昇し、この温度上昇によって、ロール表面付近の高温加熱層に組織変化や硬さ低下の可能性があると推測される。ロールが水冷されている場合、同じ接触時間で、ロールの表面温度が上昇するが、その程度は空冷の場合の半分ぐらいである。この二つの場合の円周方向および半径方向の応力分布を Fig.3 (b), (c) に示し、ロールの昇温範囲で、圧縮応力を示し、最大圧縮応力はロールの最表面に生じる。応力分布についても、温度分布と同様に空冷の場合、極めて大きくなるのがわかった。ロール表面付近の異常な温度上昇によって、ロール表面層は組織変化、硬さ低下が発生するとともに、熱応力が生じるので、この高温加熱層はロールの摩耗、肌荒れおよび割れの大きな要因となり、ロール材には適正な冷却条件で使用することが非常に重要であると思われる。

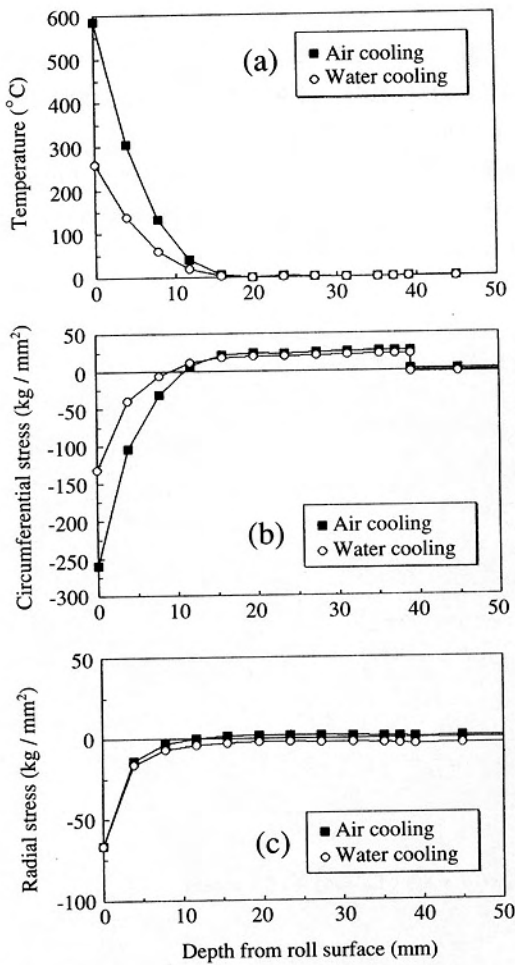


Fig.3 Temperature ((a)) and stress ((b), (c)) distributions

5.2 温度および応力の推移

Fig.4 は、ロールの水冷がある時の表面温度および応力の推移である(第5周期まで)。ロール表面はコイルと接触

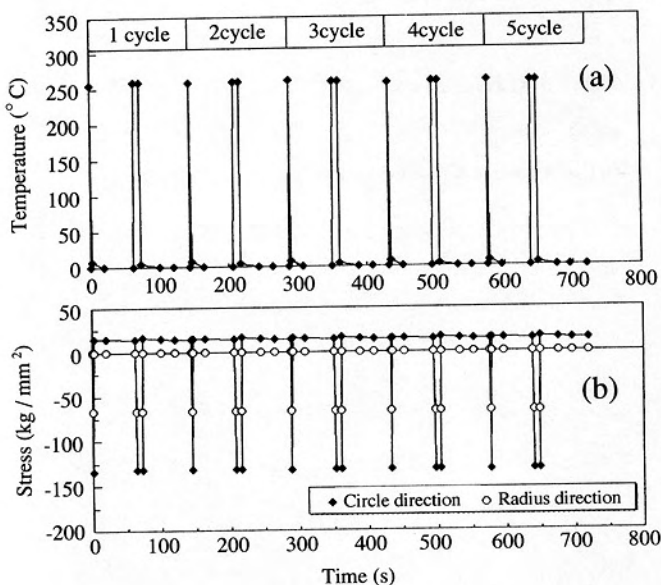


Fig.4 Temperature ((a)) and stress ((b)) transitions from 1 to 5 cycles

している時、ロールが加熱され、ロール表面の温度が上昇し、熱応力が生じる。ロールが冷却される時、温度と応力が低くなり、元の状態に戻る。ロール表面はこのような加熱-冷却が繰り返され、それにとまって、応力も変動する。Fig.5 (a) はロール最表面および深さ3.9mmの箇所での温度推移の比較であり、円周方向応力および半径方向応力の時間的変化をFig.5 (b), (c)に示す。この2箇所はともに、加熱-冷却によって温度、応力が変動し、温度上昇の時間内に、圧縮応力が生じる。深さ3.9mmの箇所に温度の上昇および下降が最表面温度に比べて、少し遅れていることが認められ、それによって応力の変動も少し遅れている。

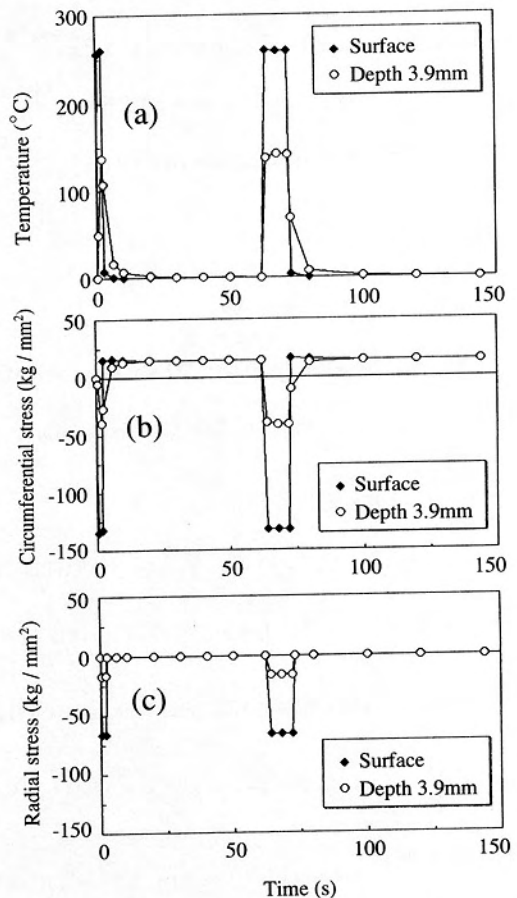


Fig.5 Temperature ((a)) and stress ((b), (c)) transitions

6 まとめ

ラプラス変換および有限フーリエ余弦変換を利用して、圧延ラインにおける複合ロール表面の熱的負荷(接触伝熱、摩擦熱)および機械的負荷による温度場を求め、さらにこれらの負荷を受けたロールに生ずる応力を熱弾性ポテンシャルと応力関数を用いて解析した。得られた温度解および応力解に基づいて、圧延ラインに加熱—冷却の繰り返しを受けている焼きばめ構造のロールを例にとり、稼働中のロールに生ずる温度および応力を数値計算することによって、ロール半径方向の温度、応力の分布およびその推移を数値的に明らかにした。本研究で得られた温度解および応力解は直盛タイプ構造の二層複合ロールにも適用できる。実機ロール

との対比および破壊に関する解析への展開が今後の課題であり、また、さらに計算結果の信頼性を高めるとともに、適用ロール材の合金設計等にも利用したいと考えている。

参考文献

1) 小泉 堯, 谷脇 力: 日本機械学会論文集, 33(1967), 248,

p.522

2) 野田直剛: 日本機械学会論文集, 43(1977), 365, p.46  
 3) 五嶋孝仁, 宮尾嘉寿: 日本機械学会論文集, 50A(1984), 452, p.1346  
 4) 五嶋孝仁: 日本機械学会論文集, 58A(1992), 549, p.39  
 5) 五嶋孝仁, 宮尾嘉寿: 日本機械学会論文集, 45A(1979), 399, p.1346

付記1: 温度解 (式 (8)) の詳細説明

式 (8) で

$$S_n^c(\tau) = Xk^2 \cos(n\omega\tau) + n\omega \sin(n\omega\tau) - Xk^2 e^{-Xk^2\tau}$$

$$S_n^s(\tau) = Xk^2 \sin(n\omega\tau) - n\omega \cos(n\omega\tau) + n\omega e^{-Xk^2\tau}$$

$$\hat{Q}(n) = \frac{1}{Q_0} \int_0^{\psi_0} q(\psi, t) \cos(n\psi) d\psi$$

$$\delta_{12}^n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$S_n^{(1)}(\rho, Xk) = \frac{2}{\pi \rho_1} J_n(\rho Xk)$$

$$S_n^{(2)}(\rho, Xk) = C_n(Xk) J_n(\rho \kappa Xk) - D_n(Xk) Y_n(\rho \kappa Xk)$$

$$+ R_H \frac{K_1}{r_0} \left\{ \frac{n}{\rho_1} J_n(\rho_1 Xk) - Xk J_{n+1}(\rho_1 Xk) \right\} \left\{ L_n^Y(Xk) J_n(\rho \kappa Xk) - L_n^J(Xk) Y_n(\rho \kappa Xk) \right\}$$

$Xk: f_n(x) = 0$  の第  $k$  番目の正根

$$f_n(x) = \{(n + h_0 + h_s) Y_n(\kappa x) - \kappa x Y_{n+1}(\kappa x)\} D_n(x) - \{(n + h_0 + h_s) J_n(\kappa x) - \kappa x J_{n+1}(\kappa x)\} C_n(x)$$

$$+ R_H \frac{k_1}{r_0} \left\{ \frac{n}{\rho_1} J_n(\rho_1 x) - x J_{n+1}(\rho_1 x) \right\} [L_n^J(x) \{(n + h_0 + h_s) Y_n(\kappa x) - \kappa x Y_{n+1}(\kappa x)\}$$

$$- L_n^Y(x) \{(n + h_0 + h_s) J_n(\kappa x) - \kappa x J_{n+1}(\kappa x)\}]$$

$$C_n(x) = \frac{n(1-k)}{\rho_1} J_n(\rho_1 x) Y_n(\rho_1 \kappa x) + \kappa x J_{n+1}(\rho_1 x) Y_n(\rho_1 \kappa x) - \kappa x J_n(\rho_1 x) Y_{n+1}(\rho_1 \kappa x)$$

$$D_n(x) = \frac{n(1-k)}{\rho_1} J_n(\rho_1 x) J_n(\rho_1 \kappa x) + \kappa x J_{n+1}(\rho_1 x) J_n(\rho_1 \kappa x) - \kappa x J_n(\rho_1 x) J_{n+1}(\rho_1 \kappa x)$$

$$L_n^J(x) = \frac{n}{\rho_1} J_n(\rho_1 \kappa x) - \kappa x J_{n+1}(\rho_1 \kappa x) \quad L_n^Y(x) = \frac{n}{\rho_1} Y_n(\rho_1 \kappa x) - \kappa x Y_{n+1}(\rho_1 \kappa x)$$

$J_n(x), Y_n(x)$ : 第一種、第二種ベッセル関数。

付記2: 温度解 (式 (15)) の詳細説明

式 (15) で

$$\delta_{\kappa}^{\theta} = \begin{cases} 1 & j=1 \\ \kappa & j=2 \end{cases}$$

$$G_n^c(\tau, \theta) = S_n^c(\tau) \cos(n\theta) + S_n^s(\tau) \sin(n\theta)$$

$$G_n^s(\tau, \theta) = S_n^c(\tau) \sin(n\theta) - S_n^s(\tau) \cos(n\theta)$$

$$\frac{A^{(1)}}{1-2\nu_1} = \frac{1}{D\nu} \{ 2(1+\nu_2) \alpha_2 \tau_2(1) + \frac{(1+\nu_1)\alpha_1}{(1-\nu_1)\rho_1^2} [ 2(1-\nu_2) \rho_1^2 G - (1-G)(1-\rho_1^2) ] \tau_1(\rho_1) - \frac{1-\rho_1^2}{\rho_1} \Delta \}$$

$$\frac{A^{(2)}}{1-2\nu_2} = \frac{1}{D\nu} \left\{ \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} (G+1-2\nu_1) \alpha_2 \tau_2(1) + 2G(1+\nu_1) \alpha_1 \tau_1(\rho_1) + G\rho_1 \Delta \right\}$$

$$B^{(1)} = 0$$

$$B^{(2)} = \frac{1}{D\nu} \left\{ \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} [(1-2\nu_1) - (1-2\nu_2)G] \rho_1^2 \alpha_2 \tau_2(1) + 2G(1+\nu_1) \alpha_1 \tau_1(\rho_1) + G\rho_1 \Delta \right\}$$

$$D\nu = G \{ 1 + (1-2\nu_2)\rho_1^2 \} + (1-2\nu_1)(1-\rho_1^2)$$

$$\tau_1(\rho) = h_s T_s \left\{ \frac{\rho^2}{2h_0} - \frac{4\rho}{\pi\rho_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-Xk^2\tau}}{Xk^2 f'_0(Xk)} J_1(\rho Xk) \right\}$$

$$\tau_2(\rho) = h_s T_s \left\{ \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2h_0} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-Xk^2\tau}}{\kappa Xk^2 f'_0(Xk)} [C_0(Xk) [ \rho J_1(\rho \kappa Xk) - \rho_1 J_1(\rho_1 \kappa Xk) ] \right.$$

$$\left. - D_0(Xk) [ \rho Y_1(\rho \kappa Xk) - \rho_1 Y_1(\rho_1 \kappa Xk) ] + R_H K_1 \kappa Xk^2 \rho J_1(\rho_1 Xk) E_1(\rho Xk) / \Gamma_0 \right\}$$

$$E_1(\rho Xk) = Y_1(\rho_1 \kappa Xk) J_1(\rho \kappa Xk) - J_1(\rho_1 \kappa Xk) Y_1(\rho \kappa Xk)$$

$${}^m X_n^{(j)}(\rho) = {}^m A_n^{(j)} \frac{(n+1)(n-2)}{2} \rho^n + {}^m B_n^{(j)} (n+1) \rho^{-(n+2)} + {}^m C_n^{(j)} \delta_{xn}^{(j)} \rho^{n-2} + {}^m D_n^{(j)} \delta_{rn}^{(j)} \rho^{-n}$$

$${}^m Y_n^{(j)}(\rho) = -{}^m A_n^{(j)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rho^{-n} - {}^m B_n^{(j)} (n+1) \rho^{-(n+2)} - {}^m C_n^{(j)} \delta_{yn}^{(j)} \rho^{n-2} + {}^m D_n^{(j)} \delta_{\theta n}^{(j)} \rho^{-n}$$

$$R_n^{(2)} = \begin{cases} (3-4\nu_2) \ln \rho - 1 & n=1 \\ (4\nu_2 - n-2) \rho^{-(n-1)} / 2 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{xn}^{(j)} = \begin{cases} 2\nu_j & n=1 \\ n-1 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{\tau n}^{(2)} = \begin{cases} 1-2\nu_2 & n=1 \\ n(1-n)/2 & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Theta_n^{(2)} = \begin{cases} (3-4\nu_2) \ln \rho & n=1 \\ (4\nu_2 + n-4) \rho^{-(n-1)} / 2 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{yn}^{(j)} = \begin{cases} -2(1-\nu_j) & n=1 \\ n+1 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{un}^{(j)} = \begin{cases} 0 & n=1 \\ 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\delta_{rn}^{(2)} = \begin{cases} 3-2\nu_2 & n=1 \\ (n-1)(n+2)/2 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{zn}^{(j)} = \begin{cases} -2(1-\nu_j) & n=1 \\ n-1 & n \geq 2 \end{cases} \quad \delta_{\theta n}^{(2)} = \begin{cases} -1+2\nu_2 & n=1 \\ (1-n)(n-2)/2 & n \geq 2 \end{cases}$$

$$R_n^{(1)} = 0 \quad \Theta_n^{(1)} = 0 \quad \delta_{rn}^{(1)} = 0 \quad \delta_{\theta n}^{(1)} = 0 \quad \delta_{\tau n}^{(1)} = 0$$

ここで  ${}^m A_n^{(j)}$ 、 ${}^m B_n^{(j)}$ 、 ${}^m C_n^{(j)}$ 、 ${}^m D_n^{(j)}$  ( $m = C, S, T$ ) ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) ( $j = 1, 2$ ) は次の連立方程式の根として与えられる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m A_n^{(2)} \\ {}^m B_n^{(2)} \\ {}^m C_n^{(2)} \\ {}^m D_n^{(2)} \\ {}^m A_n^{(1)} \\ {}^m C_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m B_1 \\ {}^m B_2 \\ {}^m B_3 \\ {}^m B_4 \\ {}^m B_5 \\ {}^m B_6 \end{bmatrix}$$

ただし  ${}^m B_n^{(1)} = {}^m D_n^{(1)} = 0$

$A_{11} = (n+1)(n-2)/2$	$A_{12} = n+1$	$A_{13} = \delta_{xn}^{(2)}$	$A_{14} = \delta_{rn}^{(2)}$	$A_{15} = 0$	$A_{16} = 0$
$A_{21} = -n(n+1)/2$	$A_{22} = n+1$	$A_{23} = -\delta_{zn}^{(2)}$	$A_{24} = \delta_{rn}^{(2)}$	$A_{25} = 0$	$A_{26} = 0$
$A_{31} = (n+1)(n-2)\rho_1^n/2$		$A_{32} = (n+1)\rho_1^{-(n+2)}$		$A_{33} = \delta_{xn}^{(2)}\rho_1^{n-2}$	
$A_{34} = \delta_{rn}^{(2)}\rho_1^{-n}$		$A_{35} = {}^m \Gamma_{12}(n+1)(2-n)\rho_1^n/2$		$A_{36} = -{}^m \Gamma_{12}\delta_{xn}^{(1)}\rho_1^{n-2}$	
$A_{41} = -n(n+1)\rho_1^n/2$		$A_{42} = (n+1)\rho_1^{-(n+2)}$		$A_{43} = -\delta_{zn}^{(2)}\rho_1^{n-2}$	
$A_{44} = -\delta_{\tau n}^{(2)}\rho_1^{-n}$		$A_{45} = {}^m \Gamma_{12}(n+1)n\rho_1^n/2$		$A_{46} = {}^m \delta_{zn}^{(1)}\rho_1^{n-2}$	
$A_{51} = (n-2+4\nu_2)\rho_1^{n+1}/2$		$A_{52} = -\rho_1^{-(n+1)}$		$A_{53} = \delta_{un}^{(j)}\rho_1^{n-1}$	
$A_{54} = R_n^{(2)}(\rho_1)$		$A_{55} = {}^m \Upsilon_{12}(2-n-4\nu_1)\rho_1^{n+1}/2$		$A_{56} = -{}^m \Upsilon_{12}\delta_{un}^{(1)}\rho_1^{n-1}$	
$A_{61} = (4\nu_2-4-n)\rho_1^{n+1}/2$		$A_{62} = -\rho_1^{-(n+1)}$		$A_{63} = -\rho_1^{n-1}$	
$A_{64} = -\Theta_n^{(2)}(\rho_1)$		$A_{65} = {}^m \Upsilon_{12}(n+4-4\nu_1)\rho_1^{n+1}/2$		$A_{66} = {}^m \Upsilon_{12}\rho_1^{n-1}$	

$${}^C T_{12} = {}^S T_{12} = (1 + \nu_1)(1 - \nu_2) / \{(1 - \nu_1)(1 + \nu_2)\} \quad {}^T T_{12} = \kappa^2 (1 + \nu_1)(1 - \nu_2) \alpha_1 / \{(1 - \nu_1)(1 + \nu_2) \alpha_2\}$$

$${}^C \Gamma_{12} = {}^S \Gamma_{12} = E_1 (1 - \nu_2) / \{E_2 (1 - \nu_1)\} \quad {}^T \Gamma_{12} = \kappa^2 E_1 \alpha_1 (1 - \nu_2) / \{E_2 \alpha_2 (1 - \nu_1)\}$$

$${}^C B_1 = -\pi (1 - \nu_2) / \{4(1 + \nu_2)\} \quad {}^C B_2 = {}^C B_3 = {}^C B_4 = {}^C B_5 = {}^C B_6 = 0$$

$${}^S B_2 = \pi (1 - \nu_2) f / \{4(1 + \nu_2)\} \quad {}^S B_1 = {}^S B_3 = {}^S B_4 = {}^S B_5 = {}^S B_6 = 0$$

$${}^T B_1 = \delta \kappa^{(2)} X_k S_{n+1}^{(2)}(1, X_k) + n(n-1) S_n^{(2)}(1, X_k)$$

$${}^T B_2 = n \delta \kappa^{(2)} X_k S_{n+1}^{(2)}(1, X_k) - n(n-1) S_n^{(2)}(1, X_k)$$

$${}^T B_3 = \delta \kappa^{(2)} X_k S_{n+1}^{(2)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 + n(n-1) S_n^{(2)}(\rho_1, X_k) / \rho_1^2 \\ - {}^T \Gamma_{12} \delta \kappa^{(1)} X_k S_{n+1}^{(1)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 - {}^T \Gamma_{12} n(n-1) S_n^{(1)}(\rho_1, X_k) / \rho_1^2$$

$${}^T B_4 = n \delta \kappa^{(2)} X_k S_{n+1}^{(2)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 - n(n-1) S_n^{(2)}(\rho_1, X_k) / \rho_1^2 \\ - {}^T \Gamma_{12} n \delta \kappa^{(1)} X_k S_{n+1}^{(1)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 + {}^T \Gamma_{12} n(n-1) S_n^{(1)}(\rho_1, X_k) / \rho_1^2$$

$${}^T B_5 = n S_n^{(2)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 - \delta \kappa^{(2)} X_k S_{n+1}^{(2)}(\rho_1, X_k) \\ - {}^T \Gamma_{12} n S_n^{(1)}(\rho_1, X_k) / \rho_1 + {}^T \Gamma_{12} \delta \kappa^{(1)} X_k S_{n+1}^{(1)}(\rho_1, X_k)$$

$${}^T B_6 = -n \{S_n^{(2)}(\rho_1, X_k) - {}^T \Gamma_{12} S_n^{(1)}(\rho_1, X_k)\} / \rho_1$$

$$\hat{P}_n = 3\pi \{\sin(n\psi_0) - n\psi_0 \cos(n\psi_0)\} / (4\psi_0^2 n^3)$$

